

第一章课后习题汇总

秋木

习题 1.1

3,5(1),6

3. 求余子式与代数余子式

已知

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -8 & 9 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 10 & 4 \end{vmatrix},$$

求元素 a_{34} 的余子式 M_{34} 和代数余子式 A_{34} 。

解

删去第 3 行、第 4 列，得到

$$\begin{aligned} M_{34} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \\ &= (50 + 16) + (30 + 8) = 104. \end{aligned}$$

因此

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -104.$$

5(1). 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}.$$

解

按第一行展开：

$$\begin{aligned} D &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2(30 - 42) - (-40 - 28) + 4(-24 - 12) \\ &= -24 + 68 - 144 = -100. \end{aligned}$$

6. 计算行列式

(1) 题目

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解

对于 n 阶行列式，其展开式定义为

$$D = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in S_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

这里， S_n 表示 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列的集合。求和指标 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 遍历 S_n 中的全部 $n!$ 个排列；也就是说，每个 $j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，且 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 两两不同。因此，每一项都是从每一行、每一列各取一个元素相乘。

若排列中 $p < q$ ，但 $j_p > j_q$ ，则称 (j_p, j_q) 构成一个逆序。所有逆序的总数称为该排列的逆序数，记作 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ；相应展开项的符号为 $(-1)^\tau$ 。

本题每一行都只有一个非零元素,因此行列式展开后只有一个非零项。第 $1, 2, \dots, n-1$ 行的非零元素分别位于第 $n-1, n-2, \dots, 1$ 列, 第 n 行的非零元素位于第 n 列, 所以对应的列排列为

$$(n-1, n-2, \dots, 1, n),$$

其中最后一个数 n 不与前面的数构成逆序, 而前 $n-1$ 个数完全逆序。因此

$$\tau = (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

对应非零元素的乘积为

$$1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!.$$

故

$$D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!.$$

(2) 题目

$$D = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & y \\ y & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解

只有两个非零项: 主对角线项为 x^n ; 排列 $(2, 3, \dots, n, 1)$ 的逆序数为 $n-1$, 对应项为 $(-1)^{n-1}y^n$ 。因此

$$D = x^n + (-1)^{n-1}y^n = x^n + (-1)^{n+1}y^n.$$

习题 1.2(A)

$$1(1), 3(3), 4(4), 5, 7(2)$$

1(1). 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

解

作 $C_1 + C_2 + C_3$ 代替 C_1 , 并提出第 1 列的公因子 $2(x+y)$, 得

$$D = 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}.$$

再依次作 $R_2 - R_1$ 、 $R_3 - R_1$, 得

$$\begin{aligned} D &= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix} \\ &= -2(x+y)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

3(3). 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & a \\ b & 0 & c & 0 & d \\ b^2 & 0 & c^2 & 0 & d^2 \\ 0 & ab & 0 & bc & 0 \\ 0 & cd & 0 & da & 0 \end{vmatrix}.$$

解

依次作 $C_2 \leftrightarrow C_3$ 、 $C_3 \leftrightarrow C_5$ 、 $C_4 \leftrightarrow C_5$ 。共交换三列, 因此行列式变号, 并得到两个对角块:

$$D = - \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix}.$$

对第一个因子依次作 $C_2 - C_1$ 、 $C_3 - C_1$ ，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c-b & d-b \\ b^2 & c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix} \\ &= a(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b & d+b \end{vmatrix} \\ &= a(c-b)(d-b)(d-c). \end{aligned}$$

第二个因子为

$$\begin{vmatrix} ab & bc \\ cd & da \end{vmatrix} = a^2bd - bc^2d = bd(a-c)(a+c).$$

因此

$$D = -abd(c-b)(d-b)(d-c)(a-c)(a+c).$$

4(4). 计算行列式

已知 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$ ，计算

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

解

依次作 $R_i - R_1$ ($i = 2, 3, \dots, n$)，再作 $C_1 + \frac{a_1}{a_2}C_2 + \cdots + \frac{a_1}{a_n}C_n$ ，得

$$D = \left(\prod_{j=1}^n a_j \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

5. 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解

按第一行展开可得递推式

$$D_n = (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2}.$$

由 $D_1 = 1-a$, $D_2 = 1-a+a^2$, 依次计算得

$$\boxed{D_5 = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5}.$$

7(2). 证明行列式恒等式

证明

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

证明

用数学归纳法。 $n=1$ 时结论显然成立。假设 $n-1$ 阶时成立，按第一列展开：

$$\begin{aligned} D_n &= xD_{n-1} + a_n \\ &= x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) + a_n \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

故结论成立。

习题 1.3

2,5

2. 求参数的值

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

存在非零解, 求 λ 的值。

解

由题意, 系数行列式应为零:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0.$$

因此

$$\boxed{\lambda = 1}.$$

5. 求三次多项式

求三次多项式 $f(x)$, 使其满足 $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 16$ 。

解

设

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

代入已知条件, 得

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 0, \\ a + b + c + d = 4, \\ 8a + 4b + 2c + d = 3, \\ 27a + 9b + 3c + d = 16. \end{cases}$$

用克拉默法则计算得

$$D = 48, \quad D_a = 96, \quad D_b = -240, \quad D_c = 0, \quad D_d = 336.$$

所以 $a = 2$, $b = -5$, $c = 0$, $d = 7$, 从而

$$\boxed{f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7}.$$

问题总结

- 题目抄错（可能是教材版本不对）
- 1.1 6（1）可以用逆序数计算符号；
- 1.1 6（2）可以用逆序数定义计算；
- 1.2 3(3) 进行列变换后成为分块矩阵；
- 1.2 7(2) 建议使用数学归纳法；